АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

10-11

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha=1$

АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ
10
11

АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

ОРТО МЕКТЕПТИН 10–11-КЛАССТАРЫ
ҮЧҮН ОКУУ КИТЕБИ

А.Н. КОЛМОГОРОВДУН редакциялоосунда

*Кыргыз Республикасынын Билим жана маданият
министрлиги сунуш кылган*

2-басылышы

БИШКЕК
«МЕКТЕП»
2003

ББК 22. 14 я 721
А45

«Акыл» АА/К — «Кыргызстан» Басма Үйү
2000-жылы Бельгия өлкөсүнүн борбору
Брюсселде «EMRC» — ЕВРОПАЛЫК сапат
сертификатына ээ болгон

1-басылышы 1992-жылы чыккан

Авторлору: *А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд*

Которгондор: *Ж. Саламатов (III главага чейин), К. Бараталиев (III главадан аягына чейин)*

Окуу китеби жалпы билим берүүчү орто мектептин окуу китептеринин мурдагы Бүткүл союздук конкурсунда сыйлыкка татыктуу болгон

А $\frac{4306020503-186}{М\ 452\ (17)-2003}$ 2003

ISBN 5-655-01494-7

КИРИШ СӨЗ

Силер жаңы сабакты окуй баштадыңар. Анын аталышындагы «алгебра» деген сөз, курстун айрым бөлүктөрү менен силердин тааныш экендигиңерди көрсөтүп турат. Мурунку жылдардагыдай эле, «тамгалуу эсептөөлөргө» — туюнтмаларды өзгөртүп түзүүлөргө, теңдемелерди, барабарсыздыктарды, алардын системаларын түзүүгө жана чыгарууга дээрлик көңүл бурулат. Буга чейин белгилүү болгон көп мүчөлөр, рационалдык бөлчөктөр, даражалар жана тамырлар менен байланышкан маселелерди чыгаруу менен катар, силерге алгебранын колдонулуш областтарын кеңейтүүгө туура келет. Тригонометриядан жаңы маалыматтар, логарифм жөнүндөгү ж.б.маалыматтар киргизилет. Курстун накта жаңы бөлүгү анализдин башталышын үйрөнүүгө арналган. Математикалык анализ (же жөн эле анализ —XVIII жүз жылдыкта түзүлгөн жана негизги эки бөлүктү: дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөрдү өзүнө камтыган математиканын тармагы. Анализ көптөгөн математиктердин (биринчи кезекте И. Ньютондун жана Г. Лейбництин) аракеттеринен улам пайда болгон жана табият таануунун өнүгүшүндө эбегейсиз роль ойноду—ар түрдүү колдонмо маселелерди чыгарууда кезигүүчү функцияларды изилдөө үчүн кубаттуу, жетишерлик универсалдуу ыкма пайда болду. Анализдин баштапкы түшүнүктөрү жана ыкмалары (туунду, дифференцирлөө, баштапкы функция, интеграл, функциянын максимумдарын жана минимумдарын издөө ыкмасы) менен таанышуу — курстун маанилүү максаттарынын бири. Адатта анализ жогорку математикага тиешелүү экендигин кошумчалай кетмекчибиз. Анализдин элементтери мектептин курсуна салыштырмалуу кийинки жылдарда эле киргизилди.

Окуу китебин кандайча пайдалануу жөнүндөгү айрым эскертүүлөр. Китептин аягындагы мазмун жана сабактык көрсөтмө, силерге керектүү болгон бөлүмдү, аныктаманы же теореманы тез табууга жардам берет. Көнүгүүлөргө карата көрсөтмөлөр жана алардын жооптору тиешелүү бөлүмдө берилди. Сунуш этилген маселелерди чыгаруунун негизги идеялары менен таанышуу үчүн, көптөгөн мисалдардын чыгарылыштары ○ жана ● белгилери менен бөлүнүп берилген. Ошондой эле, канааттандыраарлык баа алуу үчүн, ар бир пункттагы горизонталь сызыкка чейин киргизилген маселелерди чыгара билүү зарыл экендигин белгилейбиз; бул маселелер даярдыктын милдеттүү деңгээлин беришет. Сызыктан кийинки маселелер бир аз татаалыраак.

Силерге, текшерүү ишке даярданууга жардам берүү үчүн ар бир главанын аягында негизги материалды кайталоого суроолор жана маселелер келтирилген. Ал суроолордун жоопторун жана андай маселелердин чыгарылыштарын тиешелүү пункттардагы тексттен таба аласыңар.

Үйрөнүлүп жаткан түшүнүктөрдүн, терминдердин жана белгилердин (символдордун) пайда болушу, математикалык анализди түзүшкөн адамдар жөнүндө, окуу китебинин ар бир төрт главасынын аягындагы «Тарыхтан маалыматтар» деген бөлүктү окуу аркылуу биле аласыңар.

Окуу китебинин айрым пункттарында теориялык мүнөздөгү кошумча материалдар камтылган, алар ▽ жана ▲ белгилери менен бөлүнүп коюлган.

Мектепти аяктоодо силерге бүтүрүү экзамендерин берүүгө туура келет. Орто мектеп үчүн теориялык материал «Математика. Маалымдоо материалдары» китебинде кыскача баяндалгандыгы белгилүү. Курсту кайталоо үчүн практикалык көнүгүүлөр «Кайталоого маселелер» деген корутунду главага жайлаштырылган.

ОКУУ КУРАЛЫНДА КЕЗИГҮҮЧҮ БЕЛГИЛӨӨЛӨР

N	— бардык натуралдык сандардын көптүгү
Z	— бардык бүтүн сандардын көптүгү
Z_0	— бардык терс эмес бүтүн сандардын көптүгү
Q	— бардык рационалдык сандардын көптүгү
R	— бардык чыныгы сандардын көптүгү, сан түз сызыгы
$[a; b]$	— учтары a жана b ($a < b$) болгон туюк аралык (кесинди)
$(a; b)$	— учтары a жана b ($a < b$) болгон ачык аралык (интервал)
$(a; b]$, $[a; b)$	— учтары a жана b ($a < b$) болгон жарым ачык аралык
$(a;\infty)$, $[a;\infty)$, $(-\infty; b)$, $(-\infty; b)$,	— чексиз аралыктар
$(-\infty; \infty)$	— чексиз аралык, сан түз сызыгы
$\bar{a}$	— вектордун белгилениши
$(a-\delta; a+\delta)$	— бул a чекитинин δ аймагы
$[x]$	— x санынын бүтүн бөлүгү
$\{x\}$	— x санынын бөлчөк бөлүгү
$\lvert x \rvert$	— x санынын модулу (абсолюттук чоңдугу)
$f(x)$	— f функциясынын x чекитиндеги мааниси
$D(f)$	— f функциясынын аныкталуу областы
$E(f)$	— f функциясынын маанилеринин областы

Δx	— x аргументинин өсүндүсү
$\Delta f(x_0)$, Δf	— f функциясынын x_0 чекитиндеги өсүндүсү
$f'(x_0)$	— f функциясынын x_0 чекитиндеги туундусу
sin	— синус функциясы
cos	— косинус функциясы
tg	— тангенс функциясы
ctg	— котангенс функциясы
e	— e саны ($(e^x)' = e^x$ болгон көрсөткүчтүү функциянын негизи
$\log_a$	— негизи a болгон логарифм
lg	— ондук логарифм
ln	— натуралдык логарифм (негизи e болгон логарифм)
$\max\limits_{[a; b]} f$	— f функциясынын $[a; b]$ кесиндисиндеги эң чоң мааниси
$\min\limits_{[a; b]} f$	— f функциясынын $[a; b]$ кесиндисиндеги эң кичине мааниси
$\int_a^b f(x)dx$	— f функциясынын a дан b га чейинки пределдердеги интегралы
arcsin a	— a санынын арксинусу
arccos a	— a санынын арккосинусу
arctg a	— a санынын арктангенси
arcctg a	— a санынын арккотангенси

I глава

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

§ 1. САН АРГУМЕНТТҮҮ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

1. Синус, косинус, тангенс жана котангенс (кайталоо)

1. Радиандык чен. Силер бурчтардын — радиандык чени менен таанышсыңар. 1 *радиандагы* бурч — жаасынын узундугу айлананын радиусуна барабар болгон борбордук бурч (1-сүрөт). Радиандык жана градустук чендер $180^\circ = \pi$ радиан көз карандылыгы менен байланышкан; n° тагы бурч $\frac{\pi n}{180}$ радианга барабар.

Бурчтарды радиандык өлчөөдө бир катар формулалар жөнөкөйлөшөт. Алсак, радиусу r болгон айлана үчүн анын жаасынын α радиандагы l узундугу

$$l = \alpha r \qquad (1)$$

формуласы менен табылат; радиусу r болгон тегеректин жаасы α радиандан турган сектордун S аянты төмөнкүдөй болот:

$$S = \frac{\alpha r^2}{2}. \qquad (2)$$

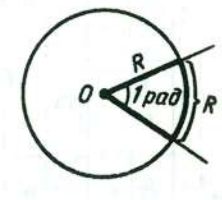
Жаасы градустук чен менен (n° чоңдук менен) өлчөнгөн айлананын жаасынын узундугун жана сектордун аянтын эсептөөчү $l = \frac{\pi r n}{180}$ жана $S = \frac{\pi r^2 n}{360}$ формулаларга караганда, (1) жана (2) формулалары жөнөкөй. Радиандык чендин бир катар артыкчылыктарынын болушу (17-пунктту да кара), тригонометрияда градустук чендин ордуна радиандык ченди пайдаланууга алып келген.

Силер алгебра курсунан, α радиан бурчка буруу кандай аныктала тургандыгын билесиңер, мында α — каалагандай чыныгы сан. α нын (α — бурч же сан) синусунун, косинусунун, тангенсинин жана котангенсинин аныктамалары да силерге тааныш.

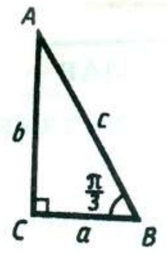
○ 1-м и с а л. $\frac{\pi}{3}$ бурчунун синусунун, косинусунун, тангенсинин жана котангенсинин маанилерин табабыз.

Тик бурчтуу үч бурчтуктагы 30° бурчтун каршысында жаткан катет c гипотенузасынын жарымына барабар (2-сүрөт). $c = 1$ болгондуктан, төмөнкүнү табабыз:

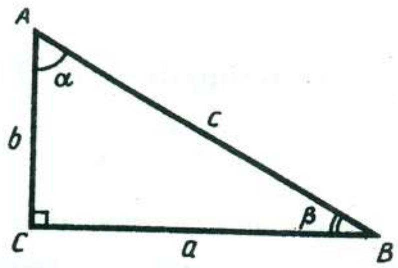
$$a = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



1-сүрөт



2-сүрөт



3-сүрөт

Ошондуктан $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ●

Жалпысынан, α тар бурчунун негизги тригонометриялык функцияларынын маанилери, геометрия курсундагы сыяктуу эле табылышы мүмкүн (3-сүрөт):

$$\cos\alpha = \frac{b}{a},\ \sin\alpha = \frac{a}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Каалаган бурчтун синусунун, косинусунун, тангенсинин жана котангенсинин жакындаштырылган маанилери калькулятордун же таблицанын жардамы менен табылат. (Бул жерде жана мындан ары В.М. Брадистин «Төрт орундуу математикалык таблицалары» жөнүндө сөз болуп жатат.) Каалаган бурчтун синусунун, косинусунун, тангенсинин жана котангенсинин маанилерин силерге белгилүү формулаларды пайдаланып табуу маселеси $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ болгондогу, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ маанилерин табууга келтирилет. Мисалы, ал жол менен кийинки таблица толтурулушу мүмкүн:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$

2. Тригонометриянын негизги формулалары. Синустун, косинустун, тангенстин жана котангенстин аныктамаларынан дароо эле *негизги тригонометриялык теңдештиктер* келип чыгат:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha};\quad \operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Калган формулаларды чыгаруу үчүн, төмөнкүдөй *кошуунун формулалары* негиз болушат:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta};\quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}.$$

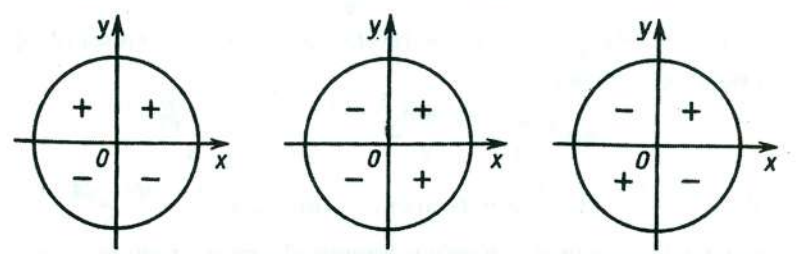
$\beta = \frac{\pi n}{2}$, мында $n \in \mathbb{Z}$ деп эсептеп, кошуунун формулаларынан

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ \cos\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ n \in \mathbb{Z}$$

туюнтмаларын өзгөртүп түзүү үчүн *келтирүүнүн формулаларын* алабыз. Бул формулаларды эске тутуу үчүн, төмөнкү *мнемоникалык (эске тутууну жеңилдетүүчү* деген мааниде, грек сөзү) *эрежени* пайдалануу ыңгайлуу:

а) *эгерде* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *болсо* (4-сүрөт), *келтирилген функциянын алдына баштапкы функциянын белгиси коюлат;*

б) *эгерде n так болсо, функция «кофункцияга» алмашат, ал эми n жуп болсо, функциянын аты өзгөрбөйт.* (Синус, косинус,



Синустун белгилери

Косинустун белгилери

Тангенстин жана котангенстин белгилери

4-сүрөт

тангенс жана котангенстердин кофункциялары деп, тиешелүү түрдө косинус, синус, котангенс жана тангенс функцияларын айтабыз.)
Мисалы:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha; \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha; \qquad \cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha \text{ ж.у.с.}$$

Ошондой эле, силерге *синустардын (косинустардын) суммасынын жана айырмасынын формулалары да белгилүү:*

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$\alpha=\beta$ деп эсептесек, кошуунун формулаларынан *эки эселенген аргументтин формулалары* чыгарылат:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\ \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha; \qquad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

$\cos 2t=1-2\sin^2 t$ жана $\cos 2t=2\cos^2 t-1$ формулаларына маанисин коюп, жарым аргументтин формулаларын алабыз:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}; \qquad (3)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}. \qquad (4)$$

○ 2-м и с а л. $\sin\frac{\pi}{12}$ маанисин таблицанын жардамысыз (3) формула боюнча табабыз:

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt3}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt3}{4}.$$

$0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{12}>0$ болгондуктан, $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2}$ барабардыгын алабыз. Жообун жөнөкөйлөтүүгө болот:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt3}}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt{(\sqrt3-1)^2}}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}. ●$$

(3) барабардыгын (4) гө мүчөлөп бөлүп, төмөнкүнү алабыз:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (5)$$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ барабардыгынын оң жагынын алымын жана бөлүмүн $2\cos\frac{\alpha}{2}$ ге көбөйтүп, төмөнкүнү табабыз:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \text{ б.а.}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (6)$$

Ушуга окшош эле, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ барабардыгынын оң жагынын алымын жана бөлүмүн $2\sin\frac{\alpha}{2}$ ге көбөйтүп, төмөнкү формулага келебиз:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (7)$$

○ 3-м и с а л. $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}$ маанисин таблицанын жардамысыз табабыз.

$$\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{1+\cos\frac{5\pi}{4}}=\frac{1+\frac{\sqrt2}{2}}{1-\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{\sqrt2+1}{\sqrt2-1}=\frac{(\sqrt2+1)^2}{2-1}=(\sqrt2+1)^2.$$

$\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{8}<\pi$ экендигин байкайбыз. Ошондуктан $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}<0$ жана натыйжада $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}=-(\sqrt2+1)$.

4-м и с а л. Эгерде $\cos\alpha=0{,}8$ жана $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ экендиги белгилүү болсо, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ жана $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ни табабыз.

$\frac{\alpha}{2}$ бурчу биринчи чейректе, демек, $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$. Ошондуктан

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{2}} = \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}3162; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+0{,}8}{2}} = \sqrt{0{,}9} \approx 0{,}9487;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333. \; ●$$

Көнүгүүлөр

Ар бир пунктта көнүгүүлөр эки бөлүккө ажыратылган. Горизонталдык сызыкка чейинки берилген маселелер, бул тема боюнча даярдыктын милдеттүү деңгээлин мүнөздөшөт: канааттандырарлык баа алыш үчүн мындай көнүгүүлөрдү чыгара билиш зарыл. Көпчүлүк учурларда тексттин тиешелүү пункттарында чечмеленген мисалдарды карап чыгып, андай маселелердин чыгарылыш жолдору менен таанышууга болот.

1. Төмөнкү бурчтардын чоңдугун радиандык чен менен туюндургула:

а) 45°, 36°, 180°; б) 120°, 310°, 360°;

в) 60°, 72°, 270°; г) 150°, 216°, 90°.

2. Төмөнкү бурчтардын чоңдугун градустук чен менен туюндургула:

а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{36}$; б) $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{9}$;

в) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{5}$, π; г) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{12}$.

3. Төмөнкү туюнтмалардын сан маанилерин тапкыла:

а) $\sin 0 + \cos\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{4}$; б) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\pi + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}$;

в) $6\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos 0 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}$; г) $3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6}$.

4. Төмөнкү барабардыктар аткарылыш үчүн жана α, β жана γ сандарын табууга болобу:

а) $\sin\alpha = -0{,}5$, $\cos\beta = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\gamma = -2{,}5$;

б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cos\beta = -2{,}2$, $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}31$;

в) $\sin\alpha = 1{,}3$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{4}$, $\operatorname{tg}\gamma = 5{,}2$;

г) $\sin\alpha = -\frac{7}{9}$, $\cos\beta = \sqrt{2{,}5}$, $\operatorname{tg}\gamma = -7{,}5$?

5. Бир эле сандын синусу жана косинусу тиешелүү түрдө төмөнкү сандарга барабар боло алышабы:

а) $-\frac{7}{25}$ жана $\frac{24}{25}$; б) $0{,}4$ жана $0{,}7$;

в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ жана $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ жана $\frac{1}{\sqrt{5}}$?

6. Бир эле сандын тангенси жана котангенси тиешелүү түрдө төмөнкү сандарга барабар боло алышабы:

а) $-\frac{3}{5}$ жана $-\frac{5}{3}$; б) $(\sqrt{3}-2)$ жана $(\sqrt{3}+2)$;

в) $2{,}4$ жана $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ жана $\frac{2\sqrt{5}}{5}$?

7. Эгерде:

а) $\sin\alpha = -0{,}8$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; г) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

болушса, негизги тригонометриялык функциялардын калган үчөөнүн маанилерин тапкыла.

8. Төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$; б) $\frac{1-2\cos^2\beta}{\cos\beta + \sin\beta}$;

в) $(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\frac{\sin^2 t - 1}{\cos^4 t} + \operatorname{tg}^2 t$.

9. Төмөнкү туюнтмаларды эсептегиле:

а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15} - \sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}}{\cos 0{,}3\pi\sin 0{,}2\pi + \sin 0{,}3\pi\cos 0{,}2\pi}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{10} + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}$; г) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18}}{\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}}$.

10. Эгерде:

а) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

б) $\cos\alpha = 0{,}6$, $\sin\beta = -\frac{8}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

болсо, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\sin(\alpha-\beta)$ жана $\cos(\alpha+\beta)$ ларды эсептегиле.

11. Төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}$; б) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos2\alpha}{\sin2\alpha-\sin\alpha}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}$; г) $\operatorname{ctg}^2\alpha(1-\cos2\alpha)+\cos^2\alpha$.

12. Берилген туюнтмаларды тиешелүү тригонометриялык функциялардын аргументтери $(0;\ \frac{\pi}{2})$ аралыгына камтылгандай кылып өзгөртүп жазгыла:

а) $\sin\frac{7\pi}{8}$, $\cos(-\frac{5\pi}{3})$, $\operatorname{tg}0{,}6\pi$, $\operatorname{ctg}(-1{,}2\pi)$;

б) $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$ $\sin(-\frac{5\pi}{9})$, $\cos1{,}8\pi$, $\operatorname{ctg}0{,}9\pi$.

13. Төмөнкү туюнтмалардын сан маанисин тапкыла:

а) $8\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$;

б) $\cos^2(\pi-\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$;

в) $10\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{4}$;

г) $\dfrac{\sin^2(\pi-t)}{1+\sin(\frac{3\pi}{2}+t)}-\cos(2\pi-t)$.

14. Төмөнкү барабардыктар туурабы:

а) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\frac{11\pi}{24}-\cos\frac{\pi}{8}=-\sin\frac{7\pi}{24}$;

в) $\sin\frac{11\pi}{18}+\sin\frac{7\pi}{18}=\cos\frac{2\pi}{9}$; г) $\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$?

15. Эгерде:

а) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; б) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

в) $\cos\alpha=\frac{24}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; г) $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

болсо, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ни тапкыла.

16. Эгерде:

а) $\alpha=0{,}19$; б) $\alpha=1{,}37$; в) $\alpha=0{,}9$; г) $\alpha=1{,}2$

болсо, калькулятордун же таблицанын жардамы менен $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ нын маанилерин тапкыла.

17. Калькулятордун же таблицанын жардамы менен төмөнкүлөрдү:

а) 17°; $43^\circ\ 24'$; $83^\circ\ 36'$; $72^\circ\ 12'$ бурчтарынын радиандык ченин;

б) 0,384; 0,48; 1,11; 1,48 бурчтарынын градустук ченин тапкыла.

---

18. Эгерде жаанын радиандык чени α жана ал жааны камтыган айлананын радиусу R белгилүү болсо, жаанын узундугун эсептегиле:

а) $\alpha=2$, $R=1$ см; б) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $R=6$ см;

в) $\alpha=0{,}1$ жана $R=1$ м; г) $\alpha=\frac{9\pi}{10}$, $R=10$ м.

19. Эгерде тегеректин R радиусу жана сектордун α борбордук бурчунун радиандык чени белгилүү болсо, сектордун аянтын эсептегиле:

а) $\alpha=2$, $R=1$ дм; б) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $R=2$ см;

в) $\alpha=0{,}1$, $R=1$ м; г) $\alpha=\frac{5\pi}{3}$, $R=3$ м.

20. а) Эгерде сектордун жаасынын узундугу тегеректин диаметрине барабар болсо, ал жаага туура келүүчү сектордун борбордук бурчун тапкыла.

б) Сектордун жаасынын узундугу анын периметринен үч эсе кичине. Анын борбордук бурчунун радиандык ченин тапкыла.

Туюнтмалардын маанилерин тапкыла (21—22).

21. а) $3\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})+2\cos(3\alpha-\pi)$, эгерде $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

б) $\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{3})+3\operatorname{tg}(\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{2})$, эгерде $\alpha=\frac{2\pi}{3}$;

в) $4\cos(3\alpha-\frac{\pi}{6})+\operatorname{ctg}(\alpha+\frac{\pi}{12})$, эгерде $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

г) $\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})\operatorname{tg}^2(2\alpha+\frac{\pi}{6})$, эгерде $\alpha=-\frac{\pi}{6}$.

22. а) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$, эгерде $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

б) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, эгерде $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{4}$;

в) $\frac{\cos\alpha + \text{ctg}\,\alpha}{\text{ctg}\,\alpha}$, эгерде $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

г) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta$, эгерде $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = 0{,}5$.

23. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болгондо, төмөнкү барабардыктардын тууралыгын далилдегиле:

а) $\sin\alpha\sqrt{1 + 1\,\text{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha\sqrt{1 + \text{tg}^{-2}\alpha}}$;

б) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 2\,\text{ctg}\,\alpha$;

в) $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$;

г) $\sqrt{\sin^2\alpha + \text{tg}^2\alpha\,\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha\,\cos^2\alpha}}$.

Тендештиктерди далилдегиле (24—26).

24. а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; б) $\frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,(\alpha+\beta)} + \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,(\alpha-\beta)} = 2$;

в) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$; г) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\,\sin\beta} = \text{tg}\,\alpha + \text{ctg}\,\beta$.

25. а) $(\sin^2 t + 2\sin t\cos t - \cos^2 t)^2 = 1 - \sin 4t$;

б) $\frac{\cos\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin\alpha} = \text{tg}\,3\alpha$;

в) $\frac{1 - 4\sin^2 t\cos^2 t}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \cos 2t$; г) $\frac{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \text{tg}\,2\alpha$.

26. а) $\cos t = \frac{1 - \text{tg}^2\frac{t}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{t}{2}}$; б) $\sin\beta = \frac{2\,\text{tg}\frac{\beta}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{\beta}{2}}$.

27. Таблицалардын жана калькулятордун жардамысыз төмөнкүлөрдү эсептегиле:

а) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; б) $\left(\sin\frac{7\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{18}\right) : \cos\frac{2\pi}{9}$;

в) $\left(\sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2$; г) $\frac{\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}}$.

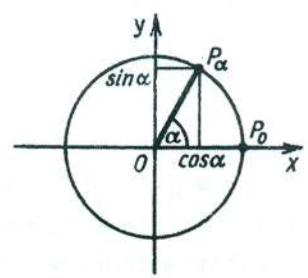
2. Тригонометриялык функциялар жана алардын графиктери

1. Синус жана косинус функциялары. Борбору координаталар башталышында, радиусу 1 болгон айлананы *бирдик айлана* деп атайбыз. Бирдик айлананын $P_0(1;\,0)$ чекитин α радиан бурчка бурганда алынган чекит P_α болсун дейли P_α чекитинин ординатасы — α бурчунун синусу, ал эми ал чекиттин абсциссасы — α бурчунун косинусу экендигин түшүнүү кыйын эмес (5-сүрөт).

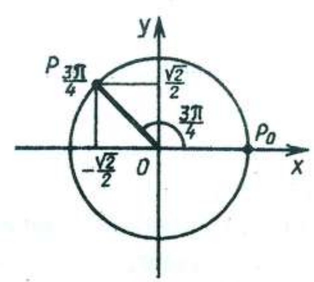
○ 1 - м и с а л. $\frac{3\pi}{4}$ радиан бурчтун синусунун, косинусунун, тангенсинин жана котангенсинин маанилерин табабыз.

Тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтуктун касиетин пайдаланып, $P\frac{3\pi}{4}$ чекитинин координаталарын табуу кыйын эмес: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ошондуктан $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$, $\text{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$. ●

Биз мындан ары бурчтарды радиандык чен менен өлчөнгөн деп эсептейбиз, ошондуктан эреже катары, *рад* деген белгилөөнү жазбайбыз. Бурчтарды өлчөөнүн бирдиктерин (1 радиан) туракту деп макулдашып, мисалы, *x санынын синусун x* радиандагы бурчтун синусу катары; *x санынын косинусун x* радиандагы бурчтун косинусу катары аныктайбыз ж.б.



5-сүрөт



6-сүрөт

А н ы к т а м а. **$y = \sin x$ жана $y = \cos x$ формулалары менен берилген сан функцияларын тиешелүү түрдө *синус* жана *косинус* деп атайбыз** (жана *sin*, *cos* деп белгилейбиз).

Бул функциялардын аныкталуу областтары — бардык чыныгы сандардын көптүгү. Бирдик айлананын чекиттеринин ординаталары жана абсциссалары −1ден 1ге чейинки бардык маанилерди алышкандыктан, синус жана косинус функцияларынын маанилеринин областы [−1; 1] кесиндиси болот. f функциясынын аныкталуу областын $D(f)$, ал эми маанилеринин областын $E(f)$ аркылуу белгилейбиз. Анда төмөнкүчө жазууга болот:

$$D(\sin) = D(\cos) = R;\ E(\sin) = E(\cos) = [-1;\ 1].$$

Синус жана косинус функцияларынын силерге белгилүү болгон касиеттерин эске салабыз:

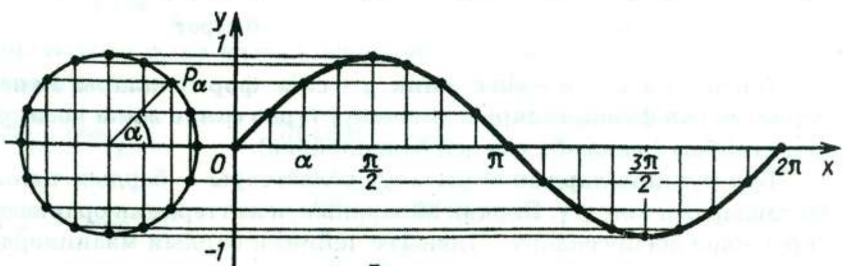
Ар кандай x үчүн төмөнкү барабардыктар туура:

1) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$;

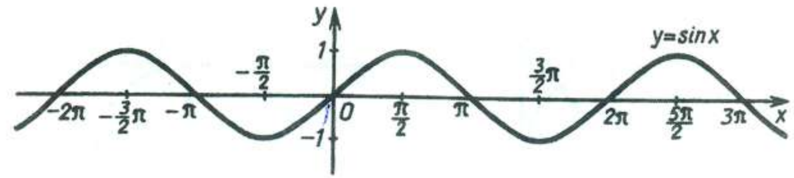
2) $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$ (n — каалагандай бүтүн сан).

2. Синусоида. Синус функциясынын графигин $[0; 2\pi]$ кесиндисинде тургузабыз. Ал үчүн ординаталар огуна (0; −1) жана (0; 1) чекиттерин, ал эми абсциссалар огуна — абсциссасы 2π болгон чекитти ($[0; 2\pi]$ кесиндисинин узундугу болжол менен 6,28ге барабар экендигине көңүл бургула) белгилейбиз. $[0; 2\pi]$ кесиндисин жана бирдик айлананы 16 барабар бөлүккө бөлөбүз (7-сүрөт). Графиктин абсциссасы α болгон чекитин түзүү үчүн, синустун аныктамасын пайдаланабыз: бирдик айланадан P_α чекитин белгилеп жана P_α чекити аркылуу абсцисса огуна параллель түз сызыкты жүргүзөбүз (7-сүрөт). Бул түз сызык менен $x = \alpha$ түз сызыгынын кесилишкен чекити изделген чекит болот, анткени анын ординатасы P_α чекитинин ординатасы менен дал келет, ал эми аныктама боюнча P_α чекитинин ординатасы $\sin\alpha$ га барабар.

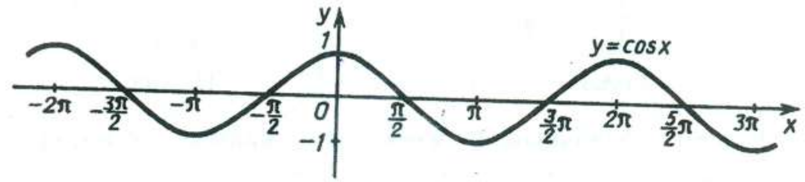
7-сүрөттө графиктин 16 чекитин түзүү көрсөтүлгөн. Аларды туташ ийри сызык менен бириктирип, синустун графигинин $[0; 2\pi]$ кесиндисиндеги эскизин алабыз. Синустун бул кесиндиден тышкары графигин түзүү үчүн, $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$ (n — каалаган бүтүн сан) экендигин эске алабыз. Ошондуктан $x_0 + 2\pi n$, мында $0 \le x_0 \le 2\pi$ түрүндөгү чекиттердин бардыгында синустун маанилери



7-сүрөт



8-сүрөт



9-сүрөт

дал келишет, натыйжада, синустун бүткүл түз сызыктагы графиги, түзүлгөн графиктен аны Ox огу боюнча (оңго жана солго) 2π, 4π, 6π ж.б. чондуктарга параллель көчүрүү аркылуу алынат (8-сүрөт). Синустун графиги *синусоида* деп аталат. Ордината огундагы [−1; 1] кесиндисинин жардамы менен синустун маанилерин таптык. Ошол кесинди кээде *синус сызыгы* деп аталат.

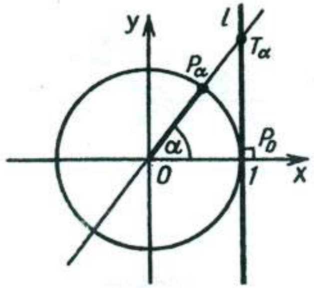
Косинустун графигин түзүү үчүн $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ экендигин эске салабыз. Демек, косинустун каалаган x_0 чекитиндеги мааниси синустун $x_0 + \frac{\pi}{2}$ чекитиндеги маанисине барабар. Бул болсо, косинустун графиги, синустун графигин Ox огунун терс багыты боюнча $\frac{\pi}{2}$ аралыкка параллель көчүрүү аркылуу алынаарын билдирет. Ошондуктан $y = \cos x$ функциясынын графиги да синусоида болот (9-сүрөт).

3. Тангенс жана котангенс функциялары, алардын графиктери.

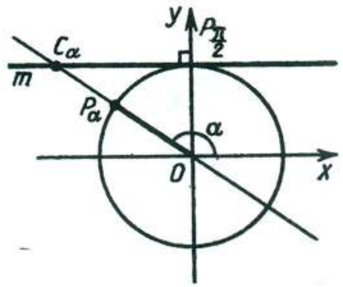
А н ы к т а м а. **$y = \mathrm{tg}x$ жана $y = \mathrm{ctg}x$ барабардыктары менен берилген сан функциялары тиешелүү түрдө *тангенс* жана *котангенс* деп аталышат** (жана tg, ctg деп белгиленет).

Тангенс функциясынын аныкталуу областы, $\cos x \ne 0$ болгон бардык x сандарынын көптүгү болот, б.а. $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ге (n — бардык бүтүн сандардын Z көптүгүнөн алынат) барабар болбогон бардык x сандары. Котангенстин аныкталуу областы $\sin x \ne 0$ болгон бардык x сандарынан турат, б.а. πn ге барабар болбогон бардык сандардан турат, мында $n \in Z$.

2—1543



10-сүрөт



11-сүрөт

Бирдик айлананын P_0 чекитине l жанымасын жүргүзөбүз (10-сүрөт). α саны, $\cos\alpha \neq 0$ болгон каалаган сан болсун. Анда $P_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ чекити ординаталар огунда жатпайт, натыйжада, OP_α түз сызыгы l ди кандайдыр бир абсциссасы 1 болгон T_α чекитинде кесет. Бул чекиттин ординатасын табабыз.

Ал үчүн OP_α түз сызыгы $O(0;0)$ жана $P_\alpha(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha\ )$ чекиттери аркылуу өтөрүн байкайбыз. Ошондуктан анын теңдемеси $y = x\ \operatorname{tg}\alpha$ болот. Ал түз сызыкта жаткан T_α чекитинин абсциссасы 1ге барабар. OP_α түз сызыгынын теңдемесинен, T_α чекитинин ординатасы $\operatorname{tg}\alpha$ га барабар экендигин табабыз. Мына ошентип, OP_α жана l түз сызыктарынын кесилишүү чекитинин ординатасы α нын тангенсине барабар. Ошондуктан l түз сызыгы *тангенстердин сызыгы* деп да аталат.

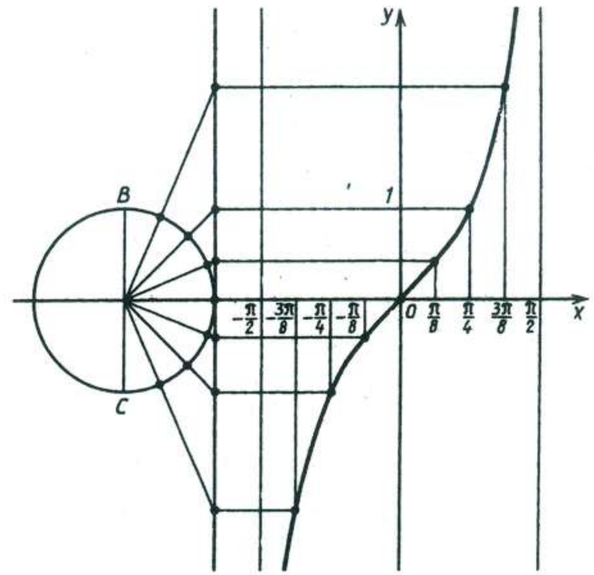
Ушул сыяктуу эле, OP_α түз сызыгы менен бирдик айлананын $P_{\frac{\pi}{2}}$ чекитине жүргүзүлгөн m жанымасынын (11-сүрөт) C_α кесилишүү чекитинин абсциссасы $\sin\alpha \neq 0$ болгондо, $\operatorname{ctg}\alpha$ га барабар экендигин далилдөө кыйын эмес. Ошондуктан m түз сызыгы *котангенстердин сызыгы* деп аталат.

Тангенстин (котангенстин) маанилеринин областы — бүткүл сан огу. Муну tg үчүн далилдейбиз. y_0 — каалагандай чыныгы сан болсун дейли. $T(1;\ y_0\ )$ чекитин карайлы. TOx бурчунун тангенси y_0 го барабар экендиги азыр эле көрсөтүлдү. Демек, tg функциясы каалагандай y_0 чыныгы маанисин алат, талап кылынган далилденди.

tg жана ctg тин белгилүү касиеттерин эсиңерге салабыз:

1) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x$; $\quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{tg}x$;

2) $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg}x$; $\quad \operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg}x,\ n \in \mathbf{Z}$.



12-сүрөт

Тангенстин графигин $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ интервалында түзүү (12-сүрөт), синустун графигин түзгөн учурга окшош жүргүзүлөт. (tg функциясынын чекиттеги мааниси тангенстердин сызыгынын жардамы менен табылат.) $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg}x\ \ n \in \mathbf{Z}$ теңдештигинин натыйжасында тангенстин бүткүл түз сызыктагы графиги (13-сүрөт), анын $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ интервалындагы графигинен, Ox огу боюнча (оңго жана солго) π, 2π ж.б. аралыктарга параллель көчүрүү аркылуу алынат. $\operatorname{tg}x$ функциясынын графиги *тангенсоида* деп аталат.

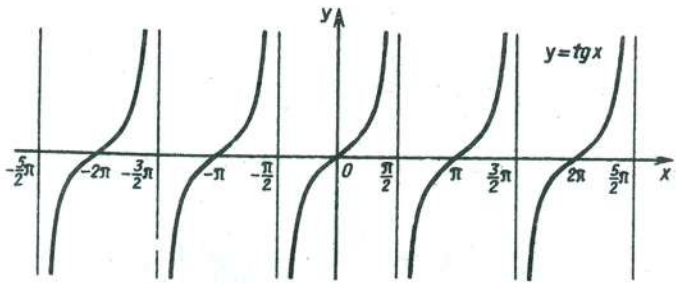
Котангенстин графиги 14-сүрөттө келтирилген.

▽ Синус, косинус, тангенс жана котангенстер, көбүнчө *негизги тригонометриялык функциялар* деп аталышат. Айрым учурларда дагы эки негизги тригонометриялык функция — *секанс* жана *косеканс* (алар sec жана cosec деп белгиленишет) каралат.

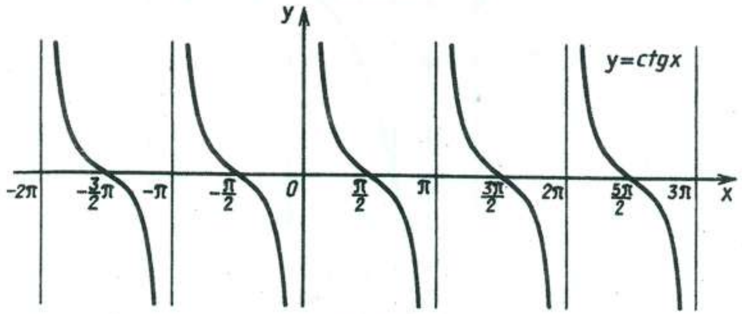
Негизги тригонометриялык функциялар эмне себептен алтоо (6) экендигин түшүнүү үчүн, α тар бурчунун тригонометриялык функциялары α тар бурчу болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынын катыштары катары аныктала тургандыгын белгилейбиз (3-сүрөт). Мындай катыштар алтоо:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.\ \blacktriangle$$



13-сүрөт



14-сүрөт

Көнүгүүлөр

28. Эгерде:

а) $\alpha = \frac{\pi}{6},\ \alpha = \frac{\pi}{2},\ \alpha = \frac{3\pi}{4}$;   б) $\alpha = \frac{\pi}{4},\ \alpha = \pi,\ \alpha = -\frac{\pi}{2}$;

в) $\alpha = \frac{\pi}{3},\ \alpha = \frac{3\pi}{2},\ \alpha = -\frac{\pi}{4}$;   г) $\alpha = -\frac{\pi}{6},\ \alpha = 2\pi,\ \alpha = \frac{5\pi}{4}$

болсо, бирдик айланада P_α чекитин белгилегиле.

29. Эгерде α төмөнкүлөргө:

а) $\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4},\ -\pi$;   б) $-\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{3\pi}{2}$;

в) $-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ 3\pi$;   г) $\frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{2}$ ге

барабар болсо, бирдик айлананын P_α чекитинин координаталарын тапкыла.

30. Эгерде α төмөнкүлөргө:

а) $\frac{3\pi}{8},\ \frac{8\pi}{7},\ -2{,}7$;   б) $\frac{5\pi}{3},\ 1{,}8\,\pi,\ -3{,}2$;

в) $\frac{7\pi}{4},\ -\frac{2\pi}{5},\ 1{,}9$;   г) $\frac{5\pi}{9},\ -2{,}3\,\pi,\ 3{,}7$ ге.

барабар болсо, P_α чекити координаталык тегиздиктин кайсы чейрегинде жайланышкан?

31. Төмөнкү сандардын белгилерин тапкыла:

а) $\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{9\pi}{8}\ \mathrm{tg}\,2{,}3\,\pi$;   б) $\sin 1 \cos 3\ \mathrm{ctg}\,5$;

в) $\sin 1{,}3\,\pi \cos\frac{7\pi}{9}\ \mathrm{tg}\,2{,}9$;   г) $\sin 8 \cos 0{,}7\ \mathrm{tg}\,6{,}4$.

32. Эгерде α төмөнкүлөргө:

а) $4\pi,\ -\pi$;   б) $\frac{5\pi}{2},\ -5{,}5\,\pi$;   в) $\pi,\ -2\,\pi$;   г) $\frac{9\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2}$ ге

барабар болсо, α нын синусунун жана косинусунун маанилерин тапкыла.

33. Төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө:

а) $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$;   б) $y = -\sin(x + \pi)$;

в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;   г) $y = \mathrm{tg}\,(x + \pi)$.

---

34. Координаталары төмөнкү шарттарды канааттандырган $P_\alpha\,(x;\,y)$ чекитин бирдик айланада белгилегиле:

а) $y = 0{,}5,\ \ x > 0$;   б) $x = -\frac{1}{2},\ \ y > 0$;

в) $x = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ y > 0$;   г) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ x < 0$.

35. Миллиметрдик кагазга бирдик айлананы, андан кийин төмөнкүдөй болгон α борбордук бурчун түзгүлө:

а) $\sin\alpha = -0{,}5$;   б) $\cos\alpha = 0{,}3$;

в) $\cos\alpha = -0{,}4$;   г) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.

36—37-функциялардын аныкталуу областтарын жана маанилеринин областтарын тапкыла. Алардын графиктерин түзгүлө.

36. а) $y = 2 + \sin x$;   б) $y = 1 + \mathrm{tg}\,x$;

в) $y = \cos x - 1$;   г) $y = 3 + \sin x$.

37. а) $y = 2\sin x$;   б) $y = -\frac{1}{2}\cos x$;

в) $y = 0{,}5\,\mathrm{tg}\,x$;   г) $y = -1{,}5\sin x$.

38—39-функцияларынын графиктеринин координата октору менен кесилишүү чекиттеринин координаталарын тапкыла.

38. а) $y = \sin x$;   б) $y = 1 + \cos x$;

в) $y = \cos x$;   г) $y = \sin x - 1$.

39. а) $y = x^2 - 3x$;   б) $y = \sin x - 1{,}5$;

в) $y = 2{,}5 + \cos x$;   г) $y = \frac{1}{x} + 1$.

§ 2. ФУНКЦИЯНЫН НЕГИЗГИ КАСИЕТТЕРИ

3. Функциялар жана алардын графиктери

1. Сан функциясы. Функция түшүнүгү менен алгебра курсунан таанышкансыңар. Анализдин башталышын окуп үйрөнүүдө төмөнкү аныктаманы кабыл алуу ыңгайлуу.

А н ы к т а м а. **Аныкталуу областы D болгон *сан функциясы* деп D көптүгүнөн алынган ар бир x санына кандайдыр бир эреже аркылуу x ке көз каранды болгон y санын тиешелүү кылуучу туура келүүчүлүктү айтабыз.**

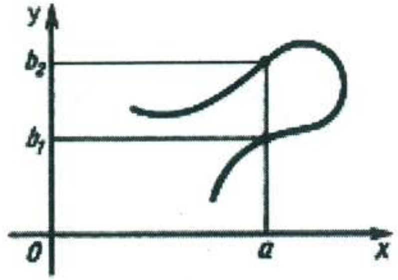
Адатта, функциялар латын (кээде грек) тамгалары менен белгиленет. Каалагандай f функциясын карап көрөлү. Көз каранды эмес x өзгөрмөсү *функциянын аргументи* деп да аталат. x санына туура келүүчү y саны f функциясынын x чекитиндеги *мааниси* деп аталат да $f(x)$ аркылуу белгиленет. f функциясынын аныкталуу областы $D(f)$ аркылуу белгиленет. x саны f функциясынын аныкталуу областына тиешелүү болгондугу, бүткүл $f(x)$ сандарынан турган көптүк *f функциясынын маанилеринин областы* деп аталат жана $E(f)$ аркылуу белгиленет.

Функция көбүнчө кандайдыр бир формуланын жардамы менен берилет. Эгерде бул учурда, кошумча чектөөлөр коюлбаса, формула менен берилген функциянын аныкталуу областы үчүн, өзгөрүүчүнүн ал формула мааниге ээ боло турган бардык маанилеринин көптүгү алынат. Мисалы, $f(x) = \frac{1}{x}$ формуласы, $x \neq 0$ болгондо мааниге ээ, ошондуктан $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясынын аныкталуу областы нөлгө барабар болбогон бардык чыныгы сандардын көптүгү болот. Анын маанилеринин көптүгү, аныкталуу областы менен дал келет жана $(-\infty; 0)$ менен $(0; \infty)$ интервалдарынын биригүүсү болот.

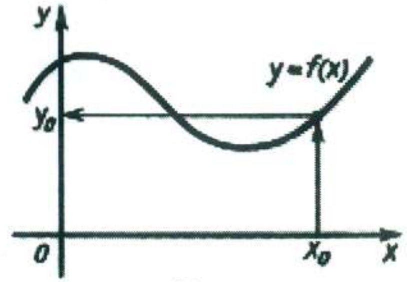
Жалпысынан, A жана B көптүктөрүнүн жок дегенде бирөөнө тиешелүү болгон бардык элементтерден түзүлгөн көптүк A жана B *көптүктөрүнүн биригүүсү* деп аталат. A жана B көптүктөрүнүн биригүүсү $A \cup B$ деп белгиленет. Мисалы, $[0; 2]$ жана $[1; 3]$ кесиндилеринин биригүүсү $[0; 3]$ кесиндиси болот.

$\cup$ символун (белгисин), сан аралыктарынын биригүүсү түрүндө көрсөтүлүүчү сан көптүгүн белгилөө үчүн пайдалануу ыңгайлуу. Алсак, $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясы үчүн

$$D(f) = E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$$



15-сүрөт



16-сүрөт

$y = \operatorname{tg} x$ функциясынын аныкталуу областы $(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n)$ түрүндөгү бардык интервалдардын биригүүсү, мында $n \in Z$ функциясынын маанилеринин областы — бүткүл сан огу, б.а. $E(\operatorname{tg}) = (-\infty; \infty)$.

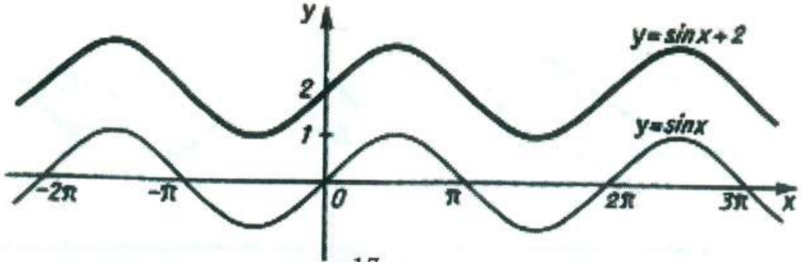
$f(x) = p(x)$ (мында $p(x)$ — көп мүчө) түрүндөгү функция *бүтүн рационалдык функция*, ал эми p жана q көп мүчөлөр болушса, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ түрүндөгү функция *бөлчөктүү — рационалдык функция* деп аталат. $\frac{p(x)}{q(x)}$ тийиндиси $q(x)$ нөлгө айланбаса аныкталат. Ошондуктан $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ бөлчөктүү — рационалдык функциянын аныкталуу областы, $q(x)$ көп мүчөсүнүн тамырларын чыгарып салгандагы, бүткүл чыныгы сандардын көптүгү болот.

○ 1 - м и с а л. $f(x) = \frac{7x^8 - 5x^6 + 3x^2 - 4x}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ бөлчөктүү — рационалдык функциянын аныкталуу областын табабыз.

$x^3 - 3x^2 + 2x$ көп мүчөсүнүн тамырлары 0,1 жана 2 сандары. Ошондуктан

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty). \ ●$$

2. Функциянын графиги. f функциясынын графиги деп x чондугу f функциясынын бүткүл аныкталуу областын «кыдырып чыкканда» $y = f(x)$ шартын канааттандырышкан, координаталык тегиздиктеги $(x;y)$ чекиттеринин көптүгүн аташат. Координаталык тегиздиктеги көптүктүн бөлүгү кандайдыр бир функциянын графиги болсун үчүн, ал көптүктүн бөлүгү Oy огуна параллель болгон ар кандай түз сызык менен бирден ашык эмес жалпы чекитке гана ээ болушу зарыл. Мисалы, 15-сүрөттө көрсөтүлгөн көптүк, функция-



17-сүрөт

нын графиги боло албайт, анткени ал бир эле a абсциссалуу, ал эми ординаталары b_1 жана b_2 болгон эки чекитти камтыйт. Эгерде бул көптүктү функциянын графиги деп эсептесек, анда бул функция $x = a$ болгон учурда дароо, b_1 жана b_2 деген эки мааниге ээ болмок, бул функциянын аныктамасына карама-карщы келет.

Көбүнчө функцияны график менен беришет. Бул учурда аныкталуу областындагы каалаган x_0 үчүн, функциянын ага тиешелүү $y_0 = f(x_0)$ маанисин табуу жеңил (16-сүрөт).

3. Графиктерди өзгөртүп түзүү. Силер графиктерин түзө билген функциялардын саны анча көп эмес — функциялар $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Фигураларды өзгөртүп түзүү жөнүндөгү геометрия курсунан белгилүү болгон маалыматтарды пайдаланып, бул тизмени бир кыйла кеңейтүүгө мүмкүн экендигин көрсөтөбүз.

1) Адегенде *ордината огун бойлото* $(0; b)$ *векторуна параллель көчүрүүнү* карайбыз. Бул жерде жана мындан ары $(x'; y')$ аркылуу берилген өзгөртүп түзүүдө, тегиздиктеги ар кандай $(x; y)$ чекити өтө турган чекиттин координаталарын белгилейбиз. Бул учурда өзгөртүп түзүүнүн силерге белгилүү болгон төмөнкүдөй формуласын алабыз:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + b. \end{cases} \qquad (1)$$

f — аныкталуу областы $D(f)$ болгон каалагандай функция болсун. Берилген көчүрүүдө бул функциянын графиги кандай фигурага өтө тургандыгын тактайлы. (1) формуладан графиктин ар кандай $(x; f(x))$ чекити $(x; f(x) + b)$ чекитине өтөөрүн дароо эле алабыз. Бул болсо, f тин графиги бардык $(x; f(x) + b)$ түрүндөгү чекиттерден түзүлгөн фигурага өтөөрүн билдирет, мында $x \in D(f)$.

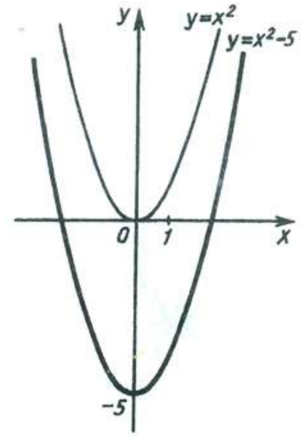
Функциянын графигинин аныктамасы боюнча, бул фигура $y = f(x) + b$ функциясынын графиги болот. Айтылгандар төмөнкү эрежени формулировкалоого алып келет:

$f(x) + b$ функциясынын графигин түзүү үчүн (мында b — турактуу сан) f тин графигин ординаталар огун бойлото $(0;b)$ векторуна көчүрүү керек.

○ 2 - м и с а л. а) $y = \sin x + 2$, б) $y = x^2 - 5$ функцияларынын графиктерин түзөбүз.

а) Эрежеге ылайык $y = \sin x$ функциясынын графигин $(0;2)$ векторуна көчүрөбүз, б.а. Oy огу боюнча жогору карай 2 бирдикке (17-сүрөт).

б) Түзүү $y = x^2$ параболасын $(0; -5)$ векторуна көчүрүү менен жүргүзүлөт, б.а. Oy огу боюнча төмөн карай (18-сүрөт). ●

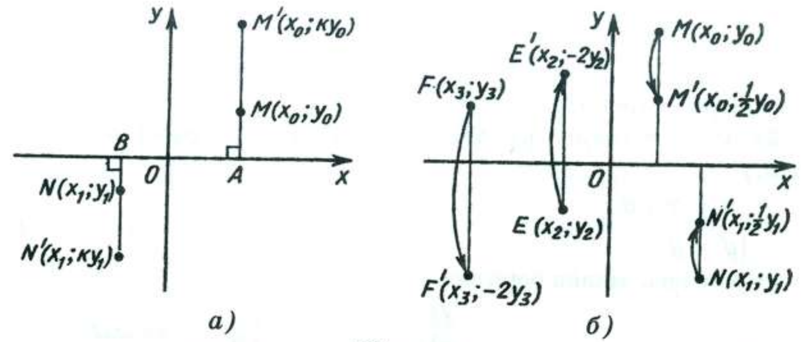


18-сүрөт

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky \end{cases} \qquad (2)$$

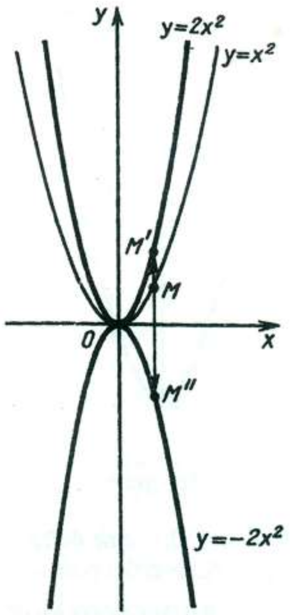
формулалары менен берилген, *k коэффициенттүү Oy огун бойлото болгон чоюу,* силер үчүн жаңы өзгөртүп түзүү болуп эсептелет.

Чоюуда, берилген M чекити өтө турган M' чекитин түзүү үчүн (19-*а*, сүрөт) MA түз сызыгында (мында A чекити M дин Ox огундагы проекциясы) A борборуна карата M чекитине гомотетиялуу чекитти түзүү керек (гомотетия коэффициенти, чоюу коэффициенти k га барабар). 19-*б*, сүрөттө, коэффициенттери $\frac{1}{2}$ жана -2 болгон чоюуларда берилген чекиттер өтө турган чекиттерди түзүү көрсөтүлгөн.



19-сүрөт

Чоюуда f функциясынын графиги кандай фигурага өтөөрүн тактайлы. f тин графигинин ар кандай $(x; f(x))$ чекити $(x; k f(x))$ чекитине өтөөрүн (2) формуладан дароо эле алабыз. Мындан, f тин



20-сүрөт

графиги, бүткүл $(x;kf(x))$ түрүндөгү чекиттерден түзүлгөн фигурага өтөөрү келип чыгат, мында $x \in D(f)$. Бул фигура $y = kf(x)$ функциясынын графиги болот. Кийинки эреже далилденди:

$y = kf(x)$ функциясынын графигин түзүү үчүн $y = f(x)$ функциясынын графигин ордината огун бойлото k эсе чоюу керек.

○ 3-мисал. $y = -2x^2$ жана $y = \frac{1}{3}\cos x$ функцияларынын графиктерин түзөбүз.

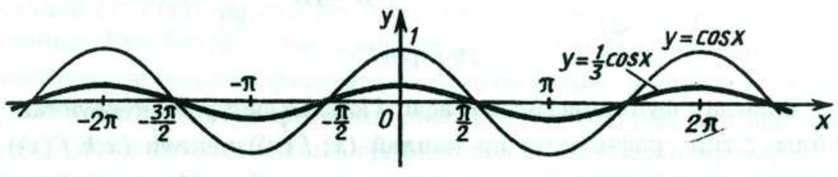
Түзүү, биринчи учурда $y = x^2$ функциясынын графиги (20-сүрөт), экинчи учурда $y = \cos x$ функциясынын графигин түзүп, андан кийин ордината огун бойлото $\frac{1}{3}$ коэффициенти менен чоюуну пайдалануу аркылуу жүргүзүлөт (21-сүрөт). ●

Эскертүү. Эгерде $0 < |k| < 1$ болсо, анда k коэффициенттүү чоюуну *кысуу* деп атайбыз. Мисалы, $\frac{1}{2}$ коэффициенттүү чоюуну 2 эсе кысуу деп атайбыз. Ошондой эле, эгерде $k < 0$ болсо, анда $y = k\,f(x)$ функциясынын графигин түзүү үчүн, адегенде f тин графигин $|k|$ эсе чоюп, анан аны абсциссалар огуна симметриялуу чагылдыруу керек (20-сүрөттү кара).

3) *Абсциссалар огун бойлото $(a;\ 0)$ векторуна параллель көчүрүү*

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y \end{cases} \qquad (3)$$

формуласы менен берилет.



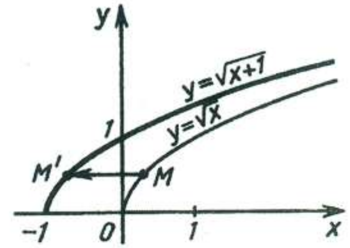
21-сүрөт

(3) формулага ылайык f функциясынын графигинин ар бир чекити $(x + a;\ f(x))$ чекитине өтөт. Ошондуктан x', y' өзгөрмөлөрүнүн жардамы менен f тин графиги $x';\ f(x' - a))$ чекиттеринен түзүлгөн Ф фигурасына өтө тургандыгын жазууга болот, мында x' өзгөрмөсү $x + a$ түрүндөгү бардык маанилерди алат $(x \in D(f))$.

x' тин так ушул маанилерде $x' - a$ саны $D(f)$ ке тиешелүү болот жана $f(x' - a)$ аныкталат. Демек, Ф фигурасы $y = f(x - a)$ функциясынын графиги болот. Мына ушинтип, төмөнкү жыйынтык чыгат:

$y = f(x - a)$ функциясынын графиги, f тин графигин (абсциссалар огун бойлото) $(a;0)$ векторуна көчүрүү аркылуу алынат.

Эгерде $a > 0$ болсо, анда $(a;\ 0)$ вектору абсциссалар огунун оң багыты боюнча, ал эми $a < 0$ болгондо октун терс багыты боюнча багытталаарына көңүл бургула.



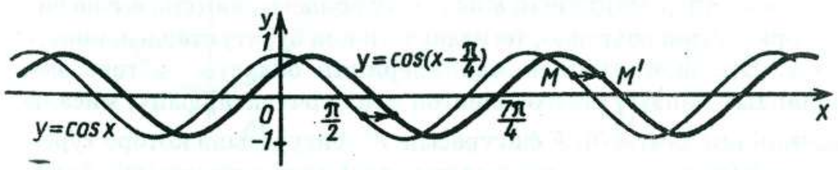
22-сүрөт

○ 4-мисал. $y = \sqrt{x + 1}$ жана $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ функцияларынын графиктерин түзүү 22-жана 23-сүрөттөрдө көрсөтүлгөн.

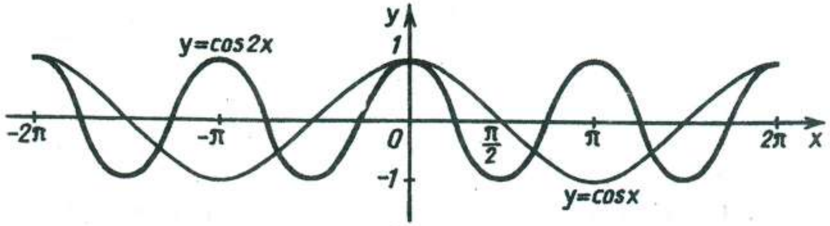
4) *Ох огун бойлото k коэффициенттүү чоюу төмөнкү формула менен берилет:*

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y. \end{cases} \qquad (4)$$

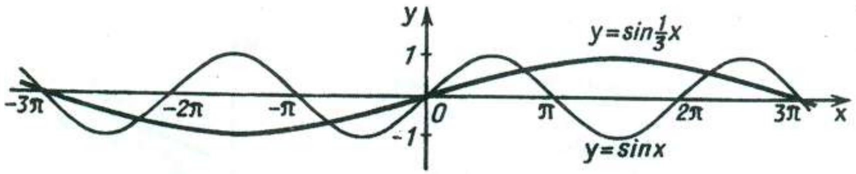
Мындай чоюуда f функциясынын каалагандай чекити $(kx;\ f(x))$ чекитине өтөт. x', y' өзгөрмөлөрүнө өтүп, $y = f(x)$ тин графиги $(x';\ f(\frac{x'}{k}))$ чекиттеринен түзүлгөн фигурага өтөөрүн жазууга болот, мында x' өзгөрмөсү $x' = kx$ түрүндөгү бардык маанилерди алат, ал эми $x \in D(f)$.



23-сүрөт



24-сүрөт



25-сүрөт

Бул фигура $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ функциясынын графиги. Мына ушинтип: *$y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ функциясынын графигин түзүү үчүн f функциясынын графигин абсциссалар огу боюнча k коэффициенттүү чоюуга дуушар кылуу керек.*

○ 5-мисал. $y = \cos 2x$ жана $y = \sin\frac{1}{3}x$ функцияларынын графигин түзүү 24-жана 25-сүрөттөрдө көрсөтүлгөн. ●

▽ **4. Чагылдыруу.** Аныкталуу областы D, маанилеринин областы E болгон функцияны, *D көптүгүн E көптүгүнө чагылдыруу* деп да айтышат. Мисалы, $y = \sin x$ формуласы, чыныгы сандардын R көптүгүнүн $[-1; 1]$ кесиндисине чагылдыруусун берет. «Функция» жана «чагылдыруу» деген сөздөр — синонимдер.

Аныкталуу областы же маанилеринин областы (мүмкүн бул эки көптүк тең) сан көптүктөрү болушпаган функциялар (чагылдыруулар) каралган учурлар аз эмес. Силер мындай мисалдар менен геометрия курсунда кездешкенсиңер. Мисалы, «Көп бурчтуктун аянты» деген функциянын аныкталуу областы, аянтты өлчөө бирдиктери бирдей болгондо, тегиздиктеги көп бурчтуктардын көптүгү болот. Бул функциянын маанилеринин областы — терс эмес сандардын көптүгү («өзгөчөлөнгөн көп бурчтуктардын», мисалы, кесиндинин аянты 0). F фигурасын F' фигурасына которо турган кыймыл (окшош өзгөртүү сыяктуу эле) дагы чагылдыруу болот: аныкталуу областы — F фигурасы, ал эми маанилеринин областы — F' фигурасы чекиттерден турушат. Чагылдыруу түшүнүгү бүткүл математикадагы негизги түшүнүктөрдөн болуп эсептелет. Анын жардамы менен функциянын мындай аныктамасын берүүгө болот: аныкталуу областы D, маанилеринин областы E болгон функция деп, D көптүгүнүн ар бир элементине E көптүгүнүн толук аныкталган бир элементин туура келтирген, ал эми E көптүгүнүн ар бир элементин D көптүгүнүн кандайдыр бир (жок дегенде бир) элементине туура келтирүүчү чагылдырууну аташат. ▲

Көнүгүүлөр

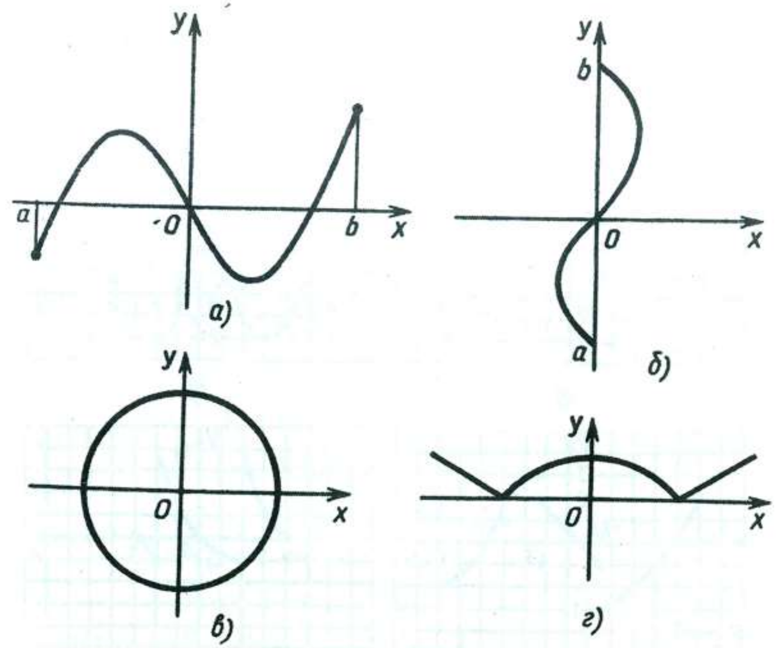
40. Функциялардын маанилерин көрсөтүлгөн чекиттерде тапкыла:

а) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, -1, $\frac{1}{2}$, 10 чекиттеринде;

б) $f(x) = 3\cos(x - \frac{\pi}{4})$, $-\frac{\pi}{4}$, 0, π чекиттеринде;

в) $f(x) = \sqrt{5x - x^2}$, 0, 1, 2 чекиттеринде;

г) $f(x) = 2 - \sin 2x$, $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{5\pi}{12}$ чекиттеринде.



26-сүрөт

41. Функциянын маанилерин көрсөтүлгөн чекиттерде жазгыла:

а) $f(x) = x^2 + 2x$, x_0 $t+1$ чекиттеринде;

б) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $a, b-1$ чекиттеринде;

в) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$, x_0, $a+2$ чекиттеринде;

г) $f(x) = 2\cos\frac{x}{3}$, $z, h+\pi$ чекиттеринде.

42. 26-*а—г*, сүрөтүндө көрсөтүлгөн фигуралар функциянын графиктери боло алышабы?

43—44 функцияларынын ар биринин аныкталуу областтарын тапкыла.

43. а) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$; б) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$;

в) $f(x) = \frac{5-x^2}{x^2+2x-8}$; г) $f(x) = \sqrt{36-x^2}$.

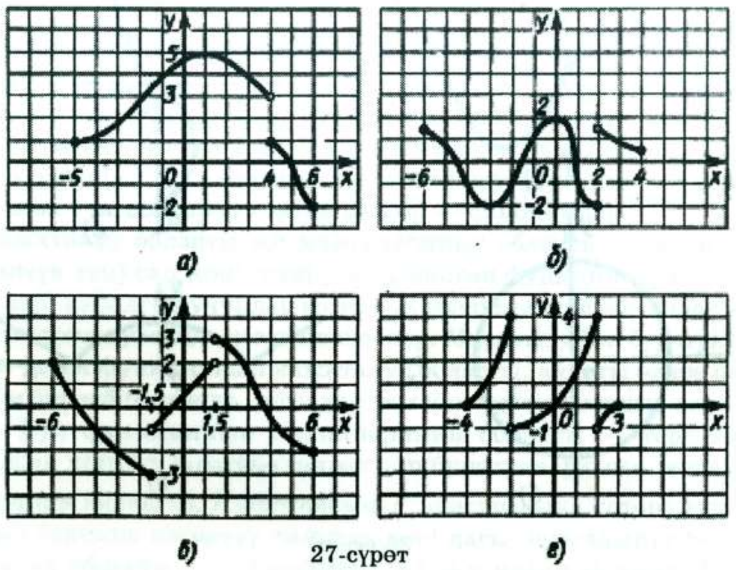
44. а) $f(x) = \frac{1}{x^3}$; б) $f(x) = 2\operatorname{tg} x$;

в) $f(x) = 1 + \operatorname{ctg} x$; г) $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

45. Ар бир функциянын аныкталуу областын жана маанилеринин областын тапкыла:

а) $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$; б) $y = 2 + \frac{4}{x-3}$;

в) $y = \frac{3}{x+1} - 1$; г) $y = 3 + 0{,}5\sin(x + \frac{\pi}{4})$.



27-сүрөт

46. Графиктери 27-*а—г*, сүрөттөрдө чийилген функциялардын аныкталуу областтарын жана маанилеринин областтарын тапкыла.

47. Төмөнкүдөй учурлар үчүн кандайдыр бир f функциясынын графигин чийгиле:

а) $D(f) = [-2;\ 4]$, $E(f) = [-3;\ 3]$;

б) $D(f) = (-5;\ 3)$, $E(f) = [2;\ 6]$;

в) $D(f) = (0;\ 7)$, $E(f) = [-1;\ 6]$;

г) $D(f) = [-4;\ 0]$, $E(f) = (1;\ 4)$.

48. Бир эле координаталык системада төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө:

а) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + 2$, $y = \frac{1}{x-2}$;

б) $y = \cos x$, $y = \cos x - 3$, $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$;

в) $y = -x^2$, $y = 4 - x^2$, $y = -(x-2)^2$;

г) $y = \sin x$, $y = \sin x + 2$, $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$.

49—50 функцияларынын графиктерин түзгүлө.

49. а) $y = \frac{1}{x-3}$; б) $y = (x-2)^2 - 4$;

в) $y = 1 - (x+2)^2$; г) $y = 2 + \frac{1}{x}$.

50. а) $y = 1 + 2\sin x$; б) $y = \sqrt{x+1} - 1$;

в) $y = 0{,}5\cos x - 1$; г) $y = 2 + \sqrt{x-1}$.

---

51. Функциялардын маанилерин көрсөтүлгөн чекиттерде тапкыла:

а) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{эгерде } x \geq 0, \\ -x, & \text{эгерде } x < 0, \end{cases}$ $-2; -\frac{1}{3}; 0;\ 5$ чекиттеринде;

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{эгерде } x \geq -1, \\ 1 - x, & \text{эгерде } x < -1, \end{cases}$ $-2; -1; 0;\ 4$ чекиттеринде;

в) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{эгерде } x > 0, \\ \cos x - 1, & \text{эгерде } x \leq 0, \end{cases}$ $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{6}$ чекиттеринде;

г) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } x > 0, \\ 0, & \text{эгерде } x = 0, \\ -1, & \text{эгерде } x < 0, \end{cases}$ $-1{,}7; -\sqrt{2}; 0;\ 3{,}8$ чекиттеринде.

52. а) ABC үч бурчтугунун AC негизи b га; BD бийиктиги h ка барабар. BD бийиктигинин K чекити аркылуу AC га параллель түз сызык жүргүзүлгөн. Бул түз сызык аркылуу берилген үч бурчтукту экиге ажыратуудан алынган ар бир фигуранын аянтын $BK = x$ аралыгынан функция түрүндө туюндургула. а) Борбордук бурчтун радиандык чени x ке, тегеректин радиусу R ге барабар. Тиешелүү сегменттин аянтын x тен функция түрүндө туюндургула.

в) Сектордун борбордук бурчунун радиандык чени α га, радиусу r ге барабар. Сектордун периметрин α бурчунан функция түрүндө туюндургула.

г) Квадраттын диагоналына параллель болгон түз сызык, аны эки фигурага бөлөт. Эгерде квадраттын жагы a га барабар болсо, ар бир фигуранын аянты менен берилген түз сызык аркылуу диагоналдан кесилип алынган кичине кесиндинин x узундугунун арасындагы байланышты формула менен бергиле.

53. Төмөнкү функциялардын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y = \dfrac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{3-2x}$; г) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-2x}$.

54. Төмөнкү функциялардын аныкталуу областын жана маанилеринин областын тапкыла:

а) $y = 1 + \sin^2 x$; б) $y = \dfrac{x-1}{x}$;

в) $y = \sqrt{x^2+4}$; г) $y = 1,5 - 0,5\cos^2 x$.

55—56-функциялардын графиктерин түзгүлө.

55. а) $y = |x-1|$; б) $y = \begin{cases} x^2-4, & \text{эгерде } x \geq 2, \\ 2-x, & \text{эгерде } x < 2; \end{cases}$

в) $y = \sqrt{2x-2}$; г) $y = \begin{cases} 3-x^2, & \text{эгерде } x > 1, \\ x-2, & \text{эгерде } x \leq 1. \end{cases}$

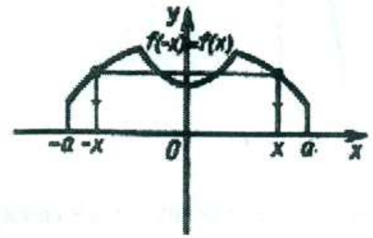
56. а) $y = \sin 3x - 1$; б) $y = \dfrac{1}{2}x^3 + 2$;

в) $y = 1 + \cos 2x$; г) $y = 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

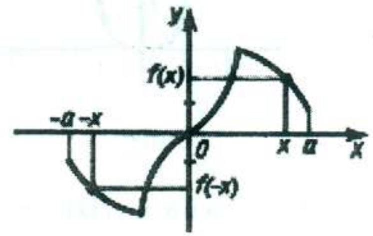
4. Жуп жана так функциялар

Тригонометриялык функциялардын мезгилдүүлүгү

1. Жуп жана так функциялар. Аныкталуу областтары координаталар башталышына карата симметриялуу болгон, б.а. аныкталуу областы каалаган x саны менен бирге $(-x)$ санын да өз ичине камтыган функцияларды карайбыз. Ушундай функциялар үчүн жуп жана так функциялар жөнүндөгү түшүнүктөр аныкталат.



28-сүрөт



29-сүрөт

А н ы к т а м а. **Эгерде аныкталуу областынан алынган ар кандай x үчүн, $f(-x) = f(x)$ (28-сүрөт) болсо, f функциясы жуп деп аталат.**

А н ы к т а м а. **Эгерде аныкталуу областынан алынган ар кандай x үчүн $f(-x) = -f(x)$ (29-сүрөт) болсо, f функциясы так деп аталат.**

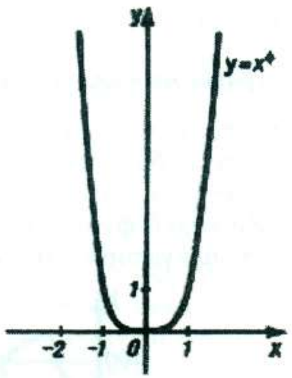
○ 1 - м и с а л. $f(x) = x^4$ функциясы жуп, ал эми $g(x) = x^3$ функциясы так. Чындыгында эле, алардын ар биринин аныкталуу областы (бул бүткүл сан түз сызыгы) O чекитине карата симметриялуу жана ар кандай x үчүн $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ барабардыктары аткарылат. Бул функциялардын графиктери 30- жана 31-сүрөттөрдө көрсөтүлгөн. ●

Жуп жана так функциялардын графиктерин түзүүдө, алгебра курсунан белгилүү болгон төмөнкү касиеттерин пайдаланабыз:

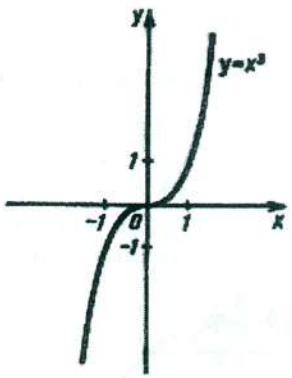
1°. ***Жуп функциянын графиги ордината огуна карата симметриялуу.***

2°. ***Так функциянын графиги координаталар башталышына карата симметриялуу.***

Бул эки эрежеден төмөнкү келип чыгат: жуп жана так функциялардын графигин түзүүдө, аны x тин терс эмес бөлүгү үчүн түзүп, андан кийин, алынган графикти ординаталар огуна карата (функция жуп болсо) же координаталар башталышына карата (функция так болсо) чагылдыруу жетиштүү.



30-сүрөт



31-сүрөт

○ **2 - м и с а л.** $f(x) = x + \frac{1}{x}$ **функциясы так функция (муну өз алдыңарча далилдегиле). Анын графиги координаталар башталышына карата симметриялуу (32-сүрөт).** ●

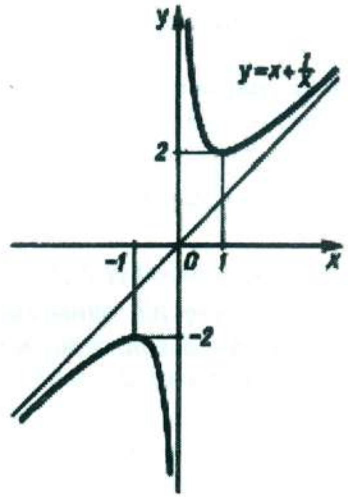
Негизги тригонометриялык функциялардан синус, тангенс жана котангенс функциялары так, ал эми косинус — жуп функция болушат (2-пунктту кара). Ошондуктан синустун, тангенстин жана котангенстин графиктери координаталар башталышына карата симметриялуу (8-, 13-, 14-сүрөттөрдү карагыла), ал эми косинустуку (9-сүрөт) — ординаталар огуна карата симметриялуу.

○ **3 - м и с а л.** $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$ **функциясы жуп, анткени анын аныкталуу областы координаталар башталышына карата симметриялуу (ал область — 1,0 жана 1 сандарынан башка бардык сандардан турат) жана бардык** $x \in D(f)$ **үчүн төмөнкү барабардык аткарылат:**

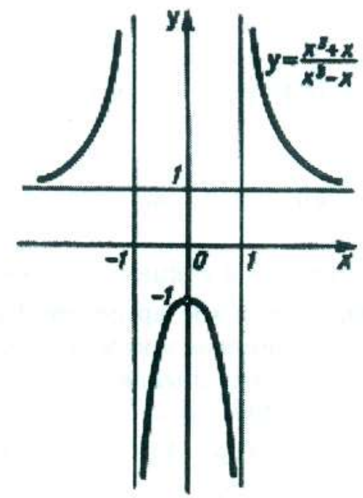
$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^3 - x}{x - x^3} = \frac{x^3 + x}{x^3 - x} = f(x).$$

Бул функциянын графиги Oy **огуна карата симметриялуу (33-сүрөт).**

○ **4 - м и с а л.** $f(x) = x^2 + x$ **функциясы жуп да, так да болбойт. Анын аныкталуу областы 0 чекитине карата симметриялуу, бирок, мисалы,** $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$ **болгондуктан,** $x = 1$ **болгондо** $f(1) = f(-1)$ **жана** $f(1) = -f(-1)$ **барабардыктарынын бирөө да аткарылбайт.** ●



32-сүрөт



33-сүрөт

2. Мезгилдүү функциялар. Практикада биз кездешүүчү көптөгөн процесстер жана кубулуштар кайталануучу мүнөздө болушат. Алсак, Күн менен Жердин өз ара жайланышы жыл өткөн сайын кайталанып турат. Маятниктин термелүү мезгили менен айырмаланган убакыттын моменттеринде, маятниктин абалдары бирдей болушат.

Мына ушул түрүндөгү процесстерди мезгилдүү, ал эми аларды туюндурган функцияларды — мезгилдүү функциялар деп аташат.

Силерге белгилүү негизги тригонометриялык функциялар — мезгилдүү. Алсак, ар кандай x жана ар кандай бүтүн k үчүн $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$ барабардыгы аткарылат. Мында, $2\pi k$ — синус функциясынын мезгили ($k \neq 0$ — каалагандай бүтүн сан) экендиги келип чыгат.

Жалпысынан, f функциясынын мезгилдүүлүгү жөнүндө сүйлөгөндө, $D(f)$ аныкталуу областында, ар кандай x чекити менен бирге, x ти Ox огу боюнча (оңго жана солго) T аралыкка параллель көчүрүү аркылуу алынуучу чекит да жайланышкандай болгон, $T \neq 0$ саны табылат деп эсептелинет. Эгерде f функциясынын аныкталуу областындагы x үчүн x, $x - T$ жана $x + T$ чекиттериндеги функциянын маанилери барабар болушса, анда ал функция мезгили $T \neq 0$ болгон мезгилдүү функция деп аталат, б.а. $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

Синус жана косинус бүткүл сан огунда аныкталышкандыктан жана ар кандай x үчүн $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

болгондуктан, синус жана косинус — мезгили 2π болгон мезгилдүү функциялар.

Тангенс жана котангенс — мезгили π болгон мезгилдүү функциялар. Чындыгында эле, бул функциялардын аныкталуу областтары ар бир x менен бирге, $x + \pi$ жана $x - \pi$ сандарын да камтышат жана $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$ барабардыктары аткарылат.

Эгерде f функциясы мезгили T болгон мезгилдүү функция болсо, анда $n \neq 0$ ар кандай бүтүн сан болгондо nT саны дагы бул функциянын мезгили болот. Мисалы, $n = 3$ болгондо, мезгилдүү функциянын аныктамасын бир нече жолу пайдаланып төмөнкүнү табабыз:

$$f(x+3T) = f((x+2T)+T) = f(x+2T) = f((x+T) = f(x+T) = f(x).$$

Төмөнкүдөй:

а) *$y = \sin x$ жана $y = \cos x$ функцияларынын эң кичине оң мезгили 2π ге барабар экендигин;*

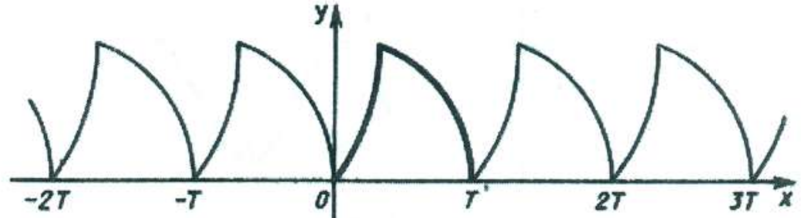
б) *$y = \operatorname{tg} x$ жана $y = \operatorname{ctg} x$ функцияларынын эң кичине оң мезгили болуп π саны эсептелерин далилдейбиз.*

$\triangledown$ а) Жогоруда белгиленгендей 2π саны бул функциялардын мезгили болуп эсептелет. Ошондуктан 2π ден кичине болгон оң сан булардын мезгили боло албай тургандыгын далилдөө гана калды. Муну далилдейбиз.

Эгерде T — косинустун каалагандай мезгили болсо, анда ар кандай α үчүн $\cos(\alpha + T) = \cos\alpha$ болот. $\alpha = 0$ деп алып, $\cos T = \cos 0 = 1$ экендигин табабыз. $\cos x = 1$ болгон эң кичине T оң саны 2π болот.

Синустун каалагандай оң мезгили T болсун дейли. Анда ар кандай α үчүн $\sin(\alpha + T) = \sin\alpha$ болот. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ деп эсептеп, $\sin(T + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ экендигин табабыз. Бирок $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in Z)$ болгондо гана $\sin x = 1$ болот. Ошондуктан $T = 2\pi n$ болот. $2\pi n$ түрүндөгү эң кичине оң сан 2π болот.

б) Эгерде T — тангенстин оң мезгили болсо, анда $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg}(0 + T) = \operatorname{tg} 0 = 0$ болот. $(0; \pi)$ интервалында тангенс нөлгө ээ болбогондуктан, $T \geq \pi$ болот. π — бул $\operatorname{tg} x$ функциясынын мезгили экендиги мурда далилденген, демек ал тангенстин эң кичине оң мезгили болот. ctg функциясы үчүн далилдөө ушуга окшош. ▲



34-сүрөт

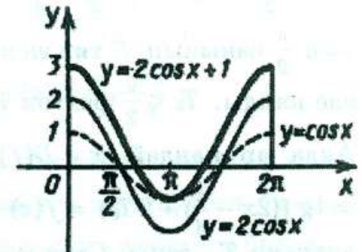
Эреже катары «эң кичине оң мезгил» деген сөз ташталып коюлат. Мисалы, тангенстин мезгили π ге, ал эми синустун мезгили 2π ге барабар деп айтуу кабыл алынган.

Биз негизги тригонометриялык функциялардын мезгилдүүлүгүн алардын графиктерин түзүүдө пайдаланганбыз. Төмөнкүдөй жалпы ырастоо туура:

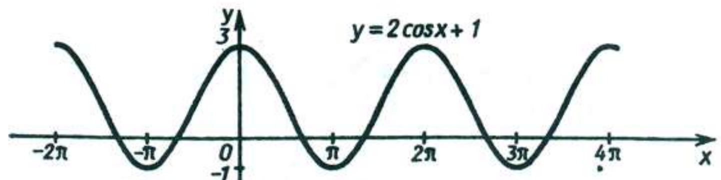
T мезгилдүү функциянын графигин түзүү үчүн, түзүүнү T узундуктагы кесиндисинде жүргүзүү жана андан кийин алынган графикти Ox огун бойлото оңго жана солго nT аралыгына параллель көчүрүү жетиштүү (34-сүрөт, мында n — ар кандай натуралдык сан).

Чындыгында, $(x_0;\ y_0)$ чекити f мезгилдүү функциясынын графигинин чекити болсун дейли. Анда $x_0 + nT$ чекити, n ар кандай бүтүн сан болгондо, f тин аныкталуу областына тиешелүү (пункттун башталышындагы эскертүүнү кара) жана f тин мезгилдүүлүгүнүн натыйжасында $f(x_0 + nT) = f(x_0) = y_0$ барабардыгы туура. Демек, $(x_0;\ y_0)$ чекитин Ox огун бойлото $(nT;0)$ векторуна параллель көчүрүүдөн алынган $(x_0 + nT;\ y_0)$ чекити дагы f тин графигинде жатат.

○ 5-мисал. $f(x) = 2\cos x + 1$ функциясынын графигин түзөбүз. Түзүш үчүн f функциясынын 2π мезгилдүүлүгүнөн пайдаланабыз. Чындыгында, f функциясы бүткүл түз сызыкта аныкталган, демек, анын аныкталуу областы каалагандай x_0 чекити менен бирге, x_0 дү Ox огу боюнча оңго жана солго 2π аралыкка параллель көчүрүү аркылуу алынган чекиттерди да камтыйт. Андан тышкары, косинустун мезгилдүүлүгүнүн



35-сүрөт



36-сүрөт

натыйжасында $f(x+2\pi) = 2\cos(x+2\pi) + 1 = 2\cos x + 1 = f(x)$. Мезгилдүү функциялардын графиктеринин касиеттеринен пайдаланып, f тин графигин адегенде $[0; 2\pi]$ кесиндисинде түзөбүз (ал үчүн графиктерди өзгөртүү боюнча белгилүү эрежелерге таянып, косинустун графигин Oy огу боюнча 2 эсе чоёбуз жана аны жогору карай 1ге жылдырабыз (көчүрөбүз), 35-сүрөт), андан кийин аны параллель көчүрүүнүн жардамы менен бүткүл сан огуна улантабыз (36-сүрөт). ●

▽ 6 - м и с а л. $f(x) = \mathrm{tg}(2x - \frac{\pi}{4})$ функциясы мезгилдүү жана анын эң кичине оң мезгили $\frac{\pi}{2}$ ге барабар экендигин далилдейбиз.

Тангенс, аргументтин $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ ге барабар болбогон бардык маанилеринде аныкталган. Ошондуктан бул функциянын аныкталуу областы $2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ болгон x терден турат, б.а. $x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ Мындан, $D(f)$ ар кандай x_0 менен бирге, $x_0 + \frac{\pi n}{2}$, $x_0 - \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ түрүндөгү бардык чекиттерди камтый тургандыгы келип чыгат. $\frac{\pi}{2}$ саны, f тин мезгили болору түшүнүктүү, анткени

$$f(x + \frac{\pi}{2}) = \mathrm{tg}\,(2\,(x + \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{4}) = \mathrm{tg}((2x - \frac{\pi}{4}) + \pi) = \mathrm{tg}(2x - \frac{\pi}{4}) = f(x).$$

Эми $\frac{\pi}{2}$ санынын f тин эң кичине оң мезгили экендигин далилдөө эле калды. $T_0 < \frac{\pi}{2}$ болгон T_0 саны f тин мезгили болсун дейли. Анда ар кандай $x \in D(f)$ үчүн $f(x + T_0) = \mathrm{tg}\,(2\,(x + T_0) - \frac{\pi}{4}) = \mathrm{tg}\,((2x - \frac{\pi}{4}) + 2T_0) = f(x) = \mathrm{tg}\,(2x - \frac{\pi}{4})$ барабардыгы аткарылат, анткени T_0 саны f тин мезгили. Бирок бул, $2T_0$ саны tg функциясынын мезгили дегенди билдирет. Болжолдоо боюнча $T_0 < \frac{\pi}{2}$, демек, $2T_0 < \pi$. Мурда далилденген менен карама-каршылыкка келдик: тангенстин эң кичине оң мезгили π ге барабар. ▲

Ушуга окшош эле, төмөнкүдөй жалпы ырастоону далилдөөгө болот:

Эгерде f функциясы мезгилдүү жана мезгили T болсо, анда $Af(kx + b)$ функциясы (мында A, k жана b лар турактуулар), ал эми $k \neq 0$ ошондой эле мезгилдүү, бирок анын мезгили $\frac{T}{|k|}$ га барабар.

Бул ырастоонун негизинде дароо эле, мисалы, $\sin(3x - \frac{\pi}{2})$ функциясынын мезгили $\frac{2\pi}{3}$ саны, ал эми $\cos(-\frac{x}{2} + \pi)$ функциясынын мезгили 4π ге барабар болорун алабыз.

Көнүгүүлөр

57—58-функцияларынын жуп экендигин далилдегиле.

57. а) $f(x) = 3x^2 + x^4$; б) $f(x) = x^5 \sin\frac{x}{2}$;
в) $f(x) = x^2 \cos x$; г) $f(x) = 4x^6 - x^2$.

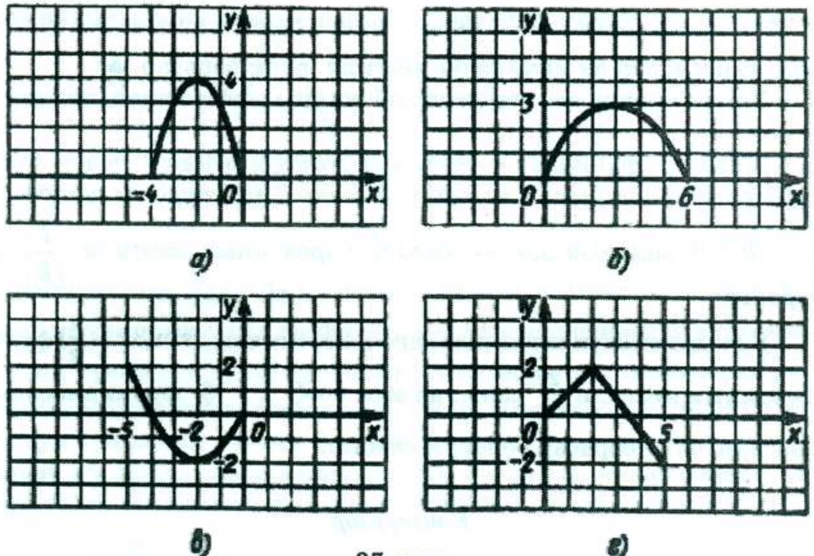
58. а) $f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$; б) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$;
в) $f(x) = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{x^3}$; г) $f(x) = \frac{\cos x^3}{4 - x^2}$.

59—60-функцияларынын жуп эмес экендигин далилдегиле:

59. а) $f(x) = x^3 \sin x^2$; б) $f(x) = x^2(2x - x^3)$;
в) $f(x) = x^5 \cos 3x$; г) $f(x) = x(5 - x^2)$.

60. а) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{2x^3}$; б) $f(x) = \frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$;
в) $f(x) = \frac{3x}{x^6 + 2}$; г) $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{x^2 - 9}$.

61. 37-*а*—*г*, сүрөттө $x \geq 0$ $(x \leq 0)$ шартын канааттандырган бардык x үчүн f функциясынын графиги тургузулган. Эгерде: 1) f — жуп функция; 2) f — так функция экендиги белгилүү болсо, f функциясынын графигин тургузула.



37-сүрөт

62. Эгерде:

а) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $T=4\pi$; б) $f(x)=2\,\mathrm{tg}\,3x$, $T=\frac{\pi}{3}$;

в) $f(x)=3\cos 4x$, $T=\frac{\pi}{2}$; г) $f(x)=\mathrm{ctg}\,\frac{x}{3}$, $T=3\pi$

болсо, T саны f функциясынын мезгили болорун далилдегиле.

63. Төмөнкү f функцияларынын мезгилдүүлүгүн далилдегиле:

а) $f(x)=2-\cos x$; б) $f(x)=\mathrm{tg}\,2x$;

в) $f(x)=\sin x+\cos x$; г) $f(x)=3+\sin^2 x$.

64—65-функцияларынын ар биринин эң кичине оң мезгилин тапкыла.

64. а) $y=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{4}$; б) $y=3\mathrm{tg}\,1,5x$;

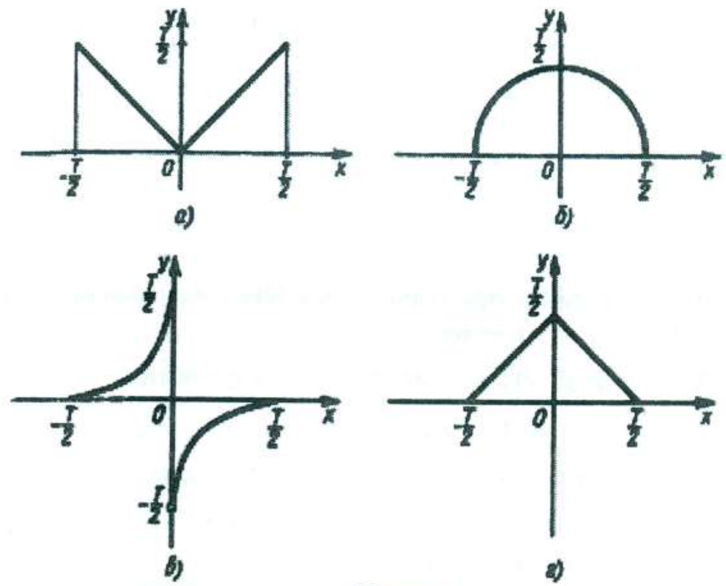
в) $y=4\cos 2x$; г) $y=5\mathrm{tg}\,\frac{x}{3}$.

65. а) $y=\sin x\cos x$; б) $y=\sin x\sin 4x-\cos x\cos 4x$;

в) $y=\sin^2 x-\cos^2 x$; г) $y=\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x$.

66. 38-*а*—*г*, сүрөттө мезгили T болгон функциянын графигинин бөлүгү чийилген. Бул функциянын графигин $[-1,5T;\ 2,5T]$ кесиндисинде тургузгула.

67. а) $y=\sin 2x$; б) $y=\cos\frac{x}{3}$; в) $y=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$; г) $y=\sin 1,5x$ функцияларынын эң кичине оң мезгилин тапкыла жана графиктерин тургузгула.



38-сүрөт

68. Эгерде:

а) $f(x)=\sin x$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{2}$, $T=\frac{2\pi}{3}$;

б) $f(x)=\cos x$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\cos(\frac{\pi}{2}+\pi)=0$, $T=\pi$;

в) $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{эгерде } x\le 1 \text{ болсо,}\\ 3-x, & \text{эгерде } x>1 \text{ болсо,}\end{cases}$

$f(-\frac{1}{2})=0,5$, $f(-\frac{1}{2}+3)=0,5$, $T=3$;

г) $f(x)=x+|x|$, $f(-4)=0$, $f(-4+3)=0$, $T=3$ болгондо, окуучу ар бир f функциясы үчүн, эки барабардыктын туура экендигин текшерип, T саны f тин мезгили болот деген жыйынтыкка келген. Окуучу жаңылган жокпу?

---

69 -70-функциялардын кайсынысы жуп, кайсынсы так, кайсынсы жуп да, так да болушпайт?

69. а) $y=\sin x+\mathrm{ctg}x-x$; б) $y=\frac{|x|}{\sin x\cos x}$;

в) $y=x^4+\mathrm{tg}^2x+x\sin x$; г) $y=\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x}{|x|}$.

70. а) $y = \dfrac{\sin x}{x^3 - 1}$; б) $y = \dfrac{x + \sin x}{x - \sin x}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}$; г) $y = \dfrac{x + \operatorname{tg} x}{x \cos x}$.

71. Төмөнкү функциялар жуп же так болорун далилдегиле жана графиктерин тургузгула:

а) $y = \dfrac{1}{x^2}$; б) $y = \dfrac{1}{x^3}$.

72. f жана g функциялары бардык чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталышкан. Эгерде:

а) $h(x) = f(x)\,g^2(x)$, f — жуп, g — так функция;

б) $h(x) = f(x) - g(x)$, f жана g — жуп функцилар;

в) $h(x) = f(x) + g(x)$, f жана g — так функциялар;

г) $h(x) = f(x)\,g(x)$, f жана g — так функциялар болсо, h функциясы жуп же так болобу?

73. Төмөнкү функциялардын эң кичине оң мезгилин тапкыла:

а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \operatorname{tg}x \operatorname{ctg}x$;

в) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$; г) $y = (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2$.

74. Төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө:

а) $y = 1 - \cos 1,5x$; б) $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$;

в) $y = 2 + \sin \dfrac{x}{2}$; г) $y = \operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{6})$.

75. Эгерде $y = f(x)$ функциясы мезгилдүү болсо, анда $y = kf(x) + b$ функциясы да мезгилдүү болорун далилдегиле.

76. 2 саны төмөнкү функциялардын мезгили эмес экендигин далилдегиле:

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = \cos x$; в) $y = 3x - 5$; г) $y = |x|$.

5. Функциялардын өсүшү жана кемиши. Экстремумдар

1. Функциялардын өсүшү жана кемиши. Силер, өсүүчү жана кемүүчү функциялар түшүнүгү менен таанышкансыңар. Алсак, 39-сүрөттө $[-1;10]$ кесиндисинде аныкталган функциянын графиги сүрөттөлгөн. Бул функция $[-1;3]$ жана $[4;5]$ кесиндилеринде өсөт, $[3;4]$ жана $[5;10]$ кесиндилеринде кемийт. $y = x^2$ функциясы $(-\infty;\ 0]$ аралыгында кемий тургандыгы жана $[0;\ -\infty)$ аралыгында

өсө тургандыгы белгилүү. Бул функциянын графиги, x чоңдугу $-\infty$ ден ∞ ге чейин өзгөргөндө, адегенде нөлгө чейин «түшөт» (0 чекитинде функциянын мааниси нөлгө барабар), андан кийин чексизге чейин «көтөрүлөт» (20-сүрөттү кара).

А н ы к т а м а. **Эгерде P көптүгүнүн $x_2 > x_1$ болгон ар кандай x_1 жана x_2 сандары үчүн $f(x_2) > f(x_1)$ барабардыгы аткарылса, f функциясы P көптүгүндө өсөт.**

А н ы к т а м а. **Эгерде P көптүгүнүн $x_2 > x_1$ болгон ар кандай x_1 жана x_2 сандары үчүн $f(x_2) < f(x_1)$ барабарсыздыгы аткарылса, f функциясы P көптүгүндө кемийт.**

Башкача айтканда, эгерде P көптүгүндөгү аргументтин чоң маанисине функциянын чоң мааниси туура келсе, f функциясы бул көптүктө өсүүчү деп аталат. Эгерде P көптүгүндөгү аргументтин чоң маанисине функциянын кичине мааниси туура келсе, f функциясы бул көптүктө кемүүчү деп аталат.

○ 1 - м и с а л. $f(x) = x^n$ $(n \in N)$ функциясы, n так болгондо бүткүл сан түз сызыгында өсөөрүн, ал эми n жуп болгондо $f(x) = x^n$ функциясы $[0;\infty)$ аралыгында өсөөрүн жана $(-\infty;\ 0]$ аралыгында кемиирин далилдейбиз.

Адегенде n дин бардык натуралдык маанилеринде $f(x) = x^n$ функциясы $[0;\infty)$ аралыгында өсө тургандыгын далилдейбиз. $x_2 > x_1 \geq 0$ болсун дейли. Анда даражанын касиети боюнча $x_2^n > x_1^n$. Эми n жуп болгон учурду карайбыз. $x_1 < x_2 \leq 0$ болсун дейли. Анда $-x_1 > -x_2 \geq 0$ жана $(-x_1)^n > (-x_2)^n \geq 0$, б.а. $x_1^n > x_2^n$. Мына ушуну менен n жуп болгондо $f(x) = x^n$ функциясынын $(-\infty;\ 0]$ аралыгында кемий тургандыгы далилденди. n так болгон учурду кароо калды. Эгерде $x_1 < 0 < x_2$ болсо, анда $x_1^n < 0 < x_2^n$. Эгерде $x_1 < x_2 \leq 0$ болсо, анда $-x_1 > -x_2 \geq 0$, ошондуктан $(-x_1)^n > (-x_2)^n \geq 0$, б.а. $-x_1^n > -x_2^n$, мындан $x_2^n > x_1^n$ экендиги келип чыгат. Мына ушинтип, n так болгондо $x_2 > x_1$ барабарсыздыгынан $x_2^n > x_1^n$ барабарсыздыгы келип чыгары далилденди. $f(x) = x^n$ функциясы n так болгондо бүткүл сан түз сызыгында өсөт.

2 - м и с а л. Эгерде $y = f(x)$ функциясы P көптүгүндө өсүүчү болсо, анда $y = -f(x)$ функциясы P көптүгүндө кемий тургандыгын далилдейбиз.